Teoria miary
WPPT IIr. semestr letni 2008
LISTA 17 (powtórkowa)

22/04/08

UWAGA: Funkcja f na przestrzeni miarowej z miarą μ nazywa się *całkowalna z modułem*, jeśli

$$\int |f| \, d\mu < \infty.$$

Zadanie 1
Niech f będzie funkcją całkowalną z modułem na ustalonej przestrzeni $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Udowodnić, że dla dowolnej liczby $\epsilon > 0$ można znaleźć $\delta > 0$, tak aby $\mu(E) < \delta$ pociągało

$$\int\limits_E |f| \; d\mu \; < \; \epsilon.$$

Wskazówka: Najpierw uzasadnić tezę przy dodatkowym założeniu, że f jest nieujemna i ograniczona.

Zadanie 2
Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot e^{-2x} \, dx.$$

Zadanie 3
Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą. Niech $f, g \colon \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi i $\int |g| d\mu < \infty$. Dla $t \in \mathbb{R}$ określamy

$$H(t) = \int_X \cos(t\, f(x))\, g(x) \, d\mu(x).$$

Uzasadnić, że tak funkcja H jest poprawnie zdefiniowana i ograniczona na $\mathbb{R}$. Czy jest ona ciągła?
Wskazówka: Skorzystać z definicji ciągłości Heinego.

Zadanie 4
Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą, $f \colon X \to [0, \infty]$, $\int f \; d\mu = c$, przy czym $0 < c < \infty$. Niech też $0 < \alpha < \infty$. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int \; n \cdot \ln \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^{\alpha} \right] \, d\mu(x).$$

Wskazówka: Rozpatrywać osobno przypadki: $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ i $1 < \alpha < \infty$.

ROZWIĄZANIE przypadku $1 < \alpha < \infty$.
Skorzystamy z faktu, że gdy $\alpha > 1$ to dla $a \geq 0$ i $b \geq 0$ mamy $(a+b)^\alpha \geq a^\alpha + b^\alpha$. Aby to sprawdzić, zauważmy, że $\frac{a}{a+b}$ i $\frac{b}{a+b}$ są liczbami z przedziału $[0,1]$, zatem podnoszenie ich do potęgi $\alpha > 1$ zmniejsza je (w każdym razie nie zwiększa ich). Czyli mamy

$$1 = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} \geq \left(\frac{a}{a+b}\right)^\alpha + \left(\frac{b}{a+b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{(a+b)^\alpha} + \frac{b^\alpha}{(a+b)^\alpha} = \frac{a^\alpha + b^\alpha}{(a+b)^\alpha}.$$

Mnożąc obie stony przez nieujemną liczbę $(a+b)^\alpha$ dostajemy żądaną nierówność. Zastosujemy to wyrażenia $1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha$:

$$1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha = 1^\alpha + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha \leq \left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)^\alpha.$$

Wynika z tego, że wszystkie funkcje podcałkowe w zadaniu są mniejsze równe od odpowiednich funkcji

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right)^\alpha = \alpha n \cdot \ln\left(1 + \frac{f(x)}{n}\right).$$

Wyrażenia te, po pominięciu mnożnika α zbiegają rosnąco do $f(x)$ (co wiemy z analizy przypadku $\alpha = 1$), zatem są mniejsze równe od f. Uwzględniając mnożnik α są to funkcje mniejsze równe od αf, a to jest funkcja nieujemna o całce skończonej. Zatem można stosować twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Łatwo widać, że funkcje podcałkowe w zadaniu zbiegają prawie wszędzie (*de facto* wszędzie) do zera (to zrobiliśmy na ćwiczeniach), a więc granica całek wynosi zero.

Zadanie 5
Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną, a $\{f_n\}$ pewnym ciągiem funkcji mierzalnych zbieżnym według miary do zera. Pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \int \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\, d\mu \ = \ 0.$$

Zadanie 6
Niech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą, $\{f_n\}$ pewnym ciągiem funkcji mierzalnych, takim że zachodzi:

$$\lim_{n\to\infty} \int \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\, d\mu \ = \ 0.$$

Pokazać, że f_n jest zbieżny według miary do zera. (Założenie $\mu(X) < \infty$ istotne było wyłącznie w poprzednim zadaniu.)

Zadanie 7
Wykazać, że jeśli f jest całkowalna z modułem na pewnej przestrzeni $(X, \mathcal{B}, \mu)$, to $n \cdot \mu(E_n) \to 0$, gdzie $E_n = \{x : \ |f(x)| \geq n\}$. Czy implikacja w przeciwną stronę jest prawdziwa?

Zadanie 8
Stosując twierdzenie Fubiniego obliczyć

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Wskazówka: Obliczyć $\iint_{\mathbb{R}^2} \ e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$ wykorzystując współrzędne biegunowe.